2.2 函数的基本性质

实例考察

已知二次函数 $f(x)=x^2$（图 2-8），反比例函数$f(x)=\dfrac{2}{x}$（图 2-9），请你通过计算，得到 $f(-x)$ 与$f(x)$ 的关系，并通过观察它们的图像，指出函数的图像特征.

二次函数　$f(x)=x^2$

定义域 D 为__________.

$f(-1)=$______，$f(1)=$______，

得到 $f(-1)=$______；

$f(-2)=$______，$f(2)=$______，

得到 $f(-2)=$______.

函数的图像特征：__________.

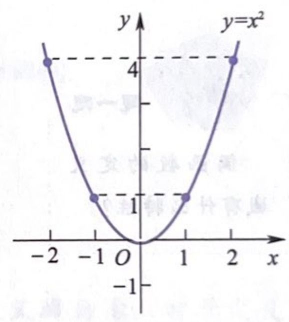

图 2-8

反比例函数　$f(x)=\dfrac{2}{x}$

定义域 D 为__________.

$f(-1)=$______，$f(1)=$______，

得到 $f(-1)=$______；

$f(-2)=$______，$f(2)=$______，

得到 $f(-2)=$______.

函数的图像特征：__________.

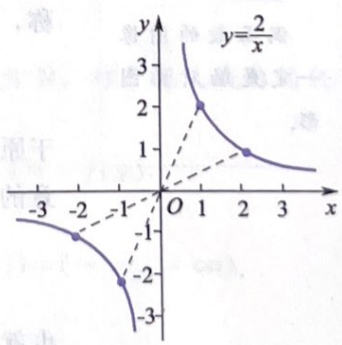

图 2-9

函数的奇偶性

我们知道，二次函数 $f(x)=x^2$ 的图像（图 2－8）关于 y 轴成轴对称图形，这种对称性在数值上也能反映出来．通过计算，得到

$$f(-1)=f(1),\ f(-2)=f(2)$$

事实上，对于任意的 $x\in(-\infty,\ +\infty)$，都有

$$f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$$

也就是说，函数 $f(x)=x^2$ 具有 $f(-x)=f(x)$ 的特性．

想一想

偶函数的定义域有什么特性？

> 一般地，设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D．如果对于任意的 $x\in D$，都有
>
> $$f(-x)=f(x)$$
>
> 我们就把函数 $y=f(x)$ 称为**偶函数**．

想一想

偶函数的图像一定是轴对称图形．

如果函数 $y=f(x)$（$x\in D$）是偶函数，那么函数 $y=f(x)$ 的图像关于 y 轴对称．反过来，如果函数 $y=f(x)$ 的图像关于 y 轴对称，那么这个函数一定是偶函数．

对于反比例函数 $f(x)=\dfrac{2}{x}$，我们知道，它的图像（图 2－9）关于原点成中心对称，这种对称性在数值上也能反映出来．对于任意的 $x\in(-\infty,\ 0)\cup(0,\ +\infty)$，都有

$$f(-x)=\frac{2}{-x}=-\frac{2}{x}=-f(x)$$

也就是说，函数 $f(x)=\dfrac{2}{x}$ 具有 $f(-x)=-f(x)$ 的特性．

想一想

奇函数的定义域有什么特性？

> 一般地，设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D．如果对于任意的 $x\in D$，都有
>
> $$f(-x)=-f(x)$$
>
> 我们就把函数 $y=f(x)$ 称为**奇函数**．

如果函数 $y=f(x)$ $(x\in D)$ 是奇函数，那么函数 $y=f(x)$ 的图像关于原点成中心对称图形．反过来，如果函数 $y=f(x)$ 的图像关于原点成中心对称图形，那么这个函数一定是奇函数．

一个函数是奇函数或偶函数，我们就说这个函数具有奇偶性．根据奇函数和偶函数的定义，可以得到：**函数的定义域关于原点对称**是函数具有奇偶性所必须具备的条件．

如果一个函数既非奇函数，又非偶函数，我们就把这个函数称为**非奇非偶函数**．

例题解析

提示

判断函数的奇偶性，必须首先求出函数的定义域 D．

提示

函数的奇偶性是函数的整体性质，确定函数是非奇非偶函数，只需举一个反例，如例 1 中第 (3) 小题；若函数的定义域关于原点不对称，可以直接指出函数是非奇非偶函数，如例 1 中的第 (4) 小题．

例 1 利用定义，判断下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=2x^4-1$；

(2) $f(x)=-3x$；

(3) $f(x)=x-2$；

(4) $f(x)=x^2-2x$，$x\in[-2,3]$．

解 (1) 函数 $f(x)=2x^4-1$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，对于定义域内的任意一个值 x，都有

$$f(-x)=2(-x)^4-1=2x^4-1=f(x)$$

所以函数 $f(x)=2x^4-1$ 是偶函数．

(2) 函数 $f(x)=-3x$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，对于定义域内的任意一个值 x，都有

$$f(-x)=-3(-x)=3x=-f(x)$$

所以函数 $f(x)=-3x$ 是奇函数．

(3) 函数 $f(x)=x-2$ 的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$．

取 $x=1$，有

$$f(-1)=-1-2=-3,\ f(1)=1-2=-1$$

因此，函数 $f(x)$ 不是偶函数．

同样，由于 $f(-1)\neq -f(1)$，因此，函数 $f(x)$ 也不是奇函数．

所以，函数 $f(x)=x-2$ 是非奇非偶函数．

(4) 函数 $f(x)=x^2-2x$，$x\in[-2,3]$ 的定义域为

$$D=[-2,3]$$

由于定义域D不关于原点对称，所以函数$f(x)=x^2-2x$，$x\in[-2,\ 3]$是非奇非偶函数.

例 2 如图 2-10 所示，已知奇函数$y=f(x)$在y轴右边部分的图像，试把函数$y=f(x)$的图像画完整.

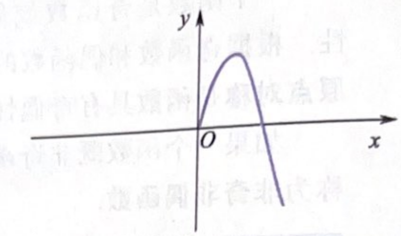

图 2-10

解 因为函数$y=f(x)$是奇函数，所以它的图像关于原点对称，利用对称性画出函数的另一半图像. 具体方法如下：

第一步，如图 2-11a 所示，在y轴右边的图像上适当取几个点O，A，B，C（一般取能够反映主要特征的点）；

第二步，画出这些点关于原点的对称点O，A'，B'，C'，用一条光滑曲线顺次联结这些对称点，就得到了$y=f(x)$的完整图像，如图 2-11b 所示.

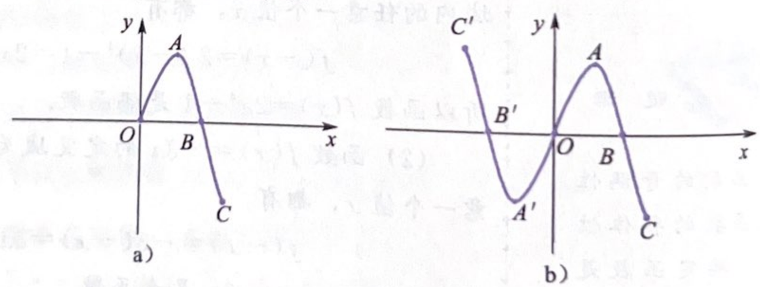

图 2-11

提 示

反映主要特征的点一般是指：与坐标轴的交点、最高点和最低点（可以是某一段曲线上的）等.

知识巩固 1

1. 利用定义，判断下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=3x^2-7$；

(2) $f(x)=\dfrac{1}{x^3}-2x$；

(3) $f(x)=-2x+3$；

(4) $f(x)=\dfrac{2}{x-3}$；

(5) $f(x)=|2x|-1$.

2. 如图 2－12 所示，已知偶函数 $y=f(x)$ 在 y 轴左边部分的图像，试把函数 $y=f(x)$ 的图像画完整，并比较 $f(1)$ 与 $f(3)$ 的大小.

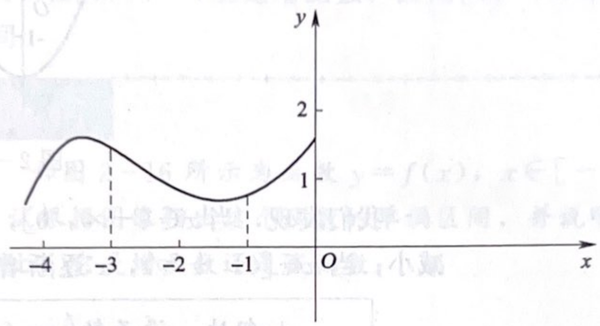

图 2－12

3. 如图 2－13 所示，已知奇函数 $y=f(x)$ 在 y 轴右边部分的图像，试把函数 $y=f(x)$ 的图像画完整，并求 $f(-4)$ 的值.

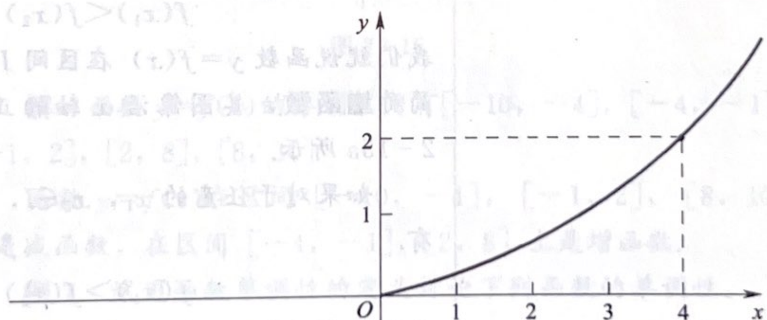

图 2－13

函数的单调性

我们知道，对于一次函数 $y=kx+b(k\neq 0)$，如果 $k>0$，那么当 $x\in(-\infty, +\infty)$，且 x 逐渐增大时，y 的值随之逐渐增大. 如果 $k<0$，那么当 $x\in(-\infty, +\infty)$，且 x 逐渐增大时，y 的值随之逐渐减小. 上述现象反映了函数的一个基本性质——单调性.